

Анализ риска

зачет

3 вопроса 1 вопрос из основной части ("черный")
2 вопроса из остальных ("белый")
+ Задачи (?)

чтобы получить зачет, нужно ответить на все вопросы (кроме того из основной)

посещаемость (иначе доп вопросы): Численные лекции - доп вопрос

компоновка (правила те же)

уменьшая сдвиг с компоновкой $\Rightarrow$ зачет автоматом

лекции только до середины семестра, компоновка после окончания лекций.

Черный список

[1] Случайная величина

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall B \in \mathcal{B} \quad \zeta^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ (свойство измеримости)

$\{ \omega \in \Omega : \zeta(\omega) \in B \}$

неизмеримая функция:

функция Дирихле



$$\{ \zeta \in B_1 \} \equiv \{ \zeta \leq 1 \} = \mathcal{A}_{0,1}$$

$$\{ \omega \in \Omega : \zeta(\omega) = 0 \} = \mathcal{A}_{0,1} / \mathcal{A}_{0,1}$$

м.б. упр. экв.

все рациональные от 0 до 1

возвращаясь к вопросу о функции Дирихле

$$\{\omega / \{f(\omega) = 0 \vee f(\omega) = 1\} = \{0, 1\}$$

(2)

$$\{\omega / g(\omega) \neq 0 \wedge g(\omega) \neq 1\} = \emptyset$$

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \emptyset, \{0, 1\}, \emptyset\} \quad \text{— здесь все нормы}$$

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{0, 1\}\} \quad \text{— а здесь уже нег. т.е. прообраз } \notin \mathcal{A}_1$$

$\Rightarrow$ неизоморфизм

[2] Независимые одинаково распределенные случайные величины

ξ_1, ξ_2 — н.с.в., если $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$:

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) = P(\xi_1 \in B_1) P(\xi_2 \in B_2)$$

ξ_1, ξ_2 — од.р. н.с.в., если $\forall B \in \mathcal{B}$

$$P(\xi_1 \in B) = P(\xi_2 \in B)$$

[3] Функция распределения и ее основные свойства.

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x), x \in \mathbb{R}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} F_\xi(x) = 1$$

т.е. неотрицательна

3) $F_\xi(x)$ не убывающая

4) $F_\xi(x)$ непрерывна слева

(если $P(\xi \leq x)$, то непрерывна)

4. Математическое ожидание в общем дисcreteм и абсолютно непрерывном случаях

(3)

З.с.в

~~Математическое ожидание~~

$$P(dw) \equiv dP(w)$$

$$1) E\zeta = \int_{w \in \Omega} \zeta(w) P(dw)$$

$$E\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{\zeta}(x)$$

если интегралы существуют

$$2) E\zeta = \sum_i x_i P(\zeta_i = x_i)$$

$$\frac{p_i}{x_i}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (-1)^n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$3) E\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx - \text{сходится}$$

$p(x)$ - плотность

Пример функции, принимающей в 0 и принимающей континуум значений

$$P(\zeta = 0) = 1$$

$$P(\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$$

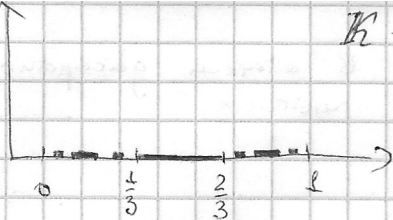
$(\Omega = [0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]}, \lambda)$ - бер. пр-во

Каждому элементу - отрезок $[0, 1]$, берем фиксированное число, ставим тем функцией 0

$\mathbb{K}$ - канторово множество -

то, что осталось незамеченным

(4)



$$\lambda(y=0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-2}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$$

$$f(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in [0, 1] / \mathbb{K} \\ \omega, & \omega \in \mathbb{K} \end{cases}$$

$\Rightarrow f(\omega)$ принимает наименьшие значения

5 Квантили распределения. Могуана.

$$p \in (0, 1)$$

u_p - p -квантиль $F(x)$, если

$$\begin{cases} F(u_p - 0) \leq p \\ F(u_p + 0) \geq p \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(Z \leq u_p) \leq p \\ P(Z > u_p) \geq 1-p \end{cases}$$

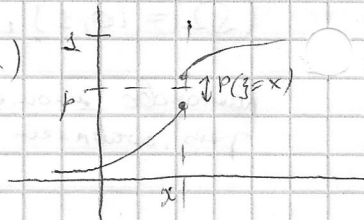
если p не является значением функции

$$\begin{cases} P(Z \leq u_p) \leq p \\ P(Z > u_p) \geq 1-p \end{cases}$$

Могуана - квантиль маргина $1/2$

$$F_Z(x) = P(Z \leq x)$$

$$P(Z \leq x) = P(Z < x) + P(Z = x)$$



[6] Отношение Лежандра Классическая гробь

(5)

$$1) L^3(\gamma) = \frac{E|\gamma|^3}{(E\gamma^2)^{3/2}}, \quad E\gamma^3 < \infty$$

γ - неслучайный с.в. в.о.

$$2) L_0^3(\gamma) = \frac{E|\gamma E - E\gamma|^3}{(D\gamma)^{3/2}}$$

- то же самое, только
нецентрированное
 $E\gamma^3 < \infty$
 γ - неслучайный с.в. в.о.

[7] Вероятность

$(\Omega, \mathcal{A})$

$$P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

$$1) P(\Omega) = 1$$

$$2) P(A) \geq 0, \quad A \in \mathcal{A}$$

$$3) \text{ аксиома аддитивности}$$

$$\forall A_i \in \mathcal{A}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Если провоз аддитивности (вместо ∞) , то надо добавить аксиомой непрерывности.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \in \mathcal{A}, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap \dots}_{\text{go } \infty})$$

[8] Распределение Пуассона (плотность, характеристическая функция) (6)

$$Y \sim \text{Pois}(\lambda), \lambda > 0$$

$$P\{Z=k\} = p_k = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$k=0, 1, \dots$$

x_{0k}	0	1
p_k	1	1

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, & x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

, строго говоря считаемой мерой на мн-ве $\{0, 1, 2, \dots\}$

или

как плотности $\mathbb{Z}$, т.к. распределение дискретное

~~$$E e^{itZ} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$~~

$$E e^{itZ} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it} \lambda)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} e^{e^{it} \lambda} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$$

[9] Нормальное распределение (плотность, характеристическая функция)

Лекция 3-4

[7]

~~8) Нормальное распределение Плотность
Характеризующееся функцией~~

$$M = \{x_1, x_2, \dots\}$$

Считаюся мера



$$\mu(B) = \sum_{x_i \in B} f(x_i)$$

B
боревское
мн-во

(число точек, попавших в заданное мн-во)

$\lambda \ll \mu$ (или доминирует λ) (абсолютно непрерывно μ)

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$$

$$\lambda(A) = \int_A f(x) d\mu(x)$$

$$A \uparrow \text{плотность} \quad f(x) = \frac{d\lambda}{d\mu}(x)$$

9) Нормальное распределение Плотность. Характеризующееся функцией

$$y \sim N(a, \sigma^2)$$

$$p(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

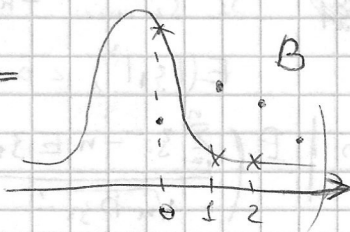
$$x \in \mathbb{N}_0$$

$$x \in \mathbb{N}_0$$

$\mathbb{N}_0$

$$P(\eta \sim \text{Pois}(\lambda) \mid \eta \in B) = \int_B p(x) d\mu(x) =$$

$$= \int_{B \cap \mathbb{N}_0} p(x) d\mu(x) =$$



$$= \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0} \frac{p(i)}{i!} \mu(i) = \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0} \frac{1}{i!} e^{-1} \quad [8]$$

~~Решение~~

$$e^{-\frac{1}{2}}$$

характеристическая функция
у случайного процесса
то распределение

$$\varphi(t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$y \sim N(0, 1)$$

$$y \stackrel{d}{=} \sigma z + a$$

$$E e^{it(\sigma z + a)} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} e^{ita}$$

10) Экспоненциальное распределение. Плотность.
Характеристическая функция.

$$X \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$$

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \text{ или } \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x \geq 0)$$

$$E e^{itx} = \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{x(it-\lambda)} dx =$$

$$= \frac{\lambda}{it-\lambda} e^{x(it-\lambda)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{it-\lambda}$$

11) Неравенство Берну-Джезена

~~Решение~~ $Z_1, Z_2, \dots$ — независимые случайные распределения с.б.н.

$$E(|Z_1|^3) < \infty, DZ_1 > 0$$

константа
нормировки

$$\sup_x \left| P\left(\frac{\sum_{i=1}^n Z_i - nEZ_1}{\sqrt{nDZ_1}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_{\text{норм}} L_3(Z_1)}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

← классическая группа Лежандра

19

12) Характеристическая функция в общем, дискретной и непрерывной случаях

$$1) E e^{itz} = \int_{\omega \in \Omega} e^{itz(\omega)} p(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_j(x)$$

$$2) y: \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix} \dots$$

$$E e^{itz} = \sum_k e^{itx_k} p_k$$

3) $p(x)$ -плотность $\{$

$$E e^{itz} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{itx} dx$$

13) Случайный процесс (две функции)

$$\{(\omega, t) \mid \omega \in \Omega, t \in T\}$$

измеряемое

$$1) \text{ ~~скалярное произведение~~ } (\Omega, \mathcal{F}) \quad (M_T, \mathcal{F}_{M_T})$$

или функции, определенные на T

$\mathcal{F}_{M_T}$ - сигма-алгебра над м-б-ом M_T

Случ. процесс $\xi: \Omega \rightarrow M_T$, такое что

$$\text{~~скалярное произведение~~ } \forall L \in \mathcal{F}_{M_T}$$

$$\{\omega \mid \xi(\omega) \in L\} \in \mathcal{F}$$

2) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (содержит все
∈ включается) 10

Случ. процесс ξ — параметризованное семейство
случ. величин $\{\xi(\omega, t), t \in T\}$,
заданных на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

14) Борелевская сигма-алгебра

Опр 1 Минимальная сигма-алгебра, включающая
все открытые ^(интервалы) множества,
для которого она определена

Опр 2 $\mathcal{B}$ -алгебра, порожденная множествами всевозможных
открытых интервалов (множеств)

15) Безгранично делимое распределение (2 определения)

Опр 1 Распределение — безгранично делимое, если его хар-
ф-ция $f(x) = (g_n(x))^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
где $g_n(x)$ — некоторая
характеристическая
функция $\forall n \in \mathbb{N}$

Опр 2 Случ. величина ξ имеет безгранично делимое
распределение, если $\forall n \in \mathbb{N}$ ~~существует~~

$$\xi \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n \xi_{i,n} \quad (\text{по распределению})$$

$\xi_{i,n}$ — НОРС $\forall n \in \mathbb{N}$

? Бернулли — является ли безг. делимой?
 $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$

$$E e^{it\xi} = (1-p + pe^{it})^n \Rightarrow \text{дезградирующее генное}$$

III

16) Неравенство Ч. У. У. У. У.

$f(x)$ выпукл вниз (вверх): $E f(\xi)$, $E \xi$ - случайное

$$E f(\xi) \geq f(E \xi)$$

17) Формула полной вероятности

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

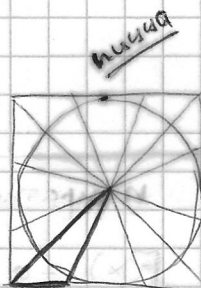
$$\{B_i\} \in \mathcal{A}, B_i B_j = \emptyset, i \neq j$$

$i = 1, \dots$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, P(B_i) > 0 \quad \forall i$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i) P(B_i)$$

$P(A|B_i)$



если $\Omega = \bigcup_i B_i$, то $\{B_i\}$ - полная группа событий

18) Аналог формулы полной вероятности для математического ожидания

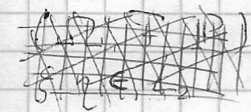
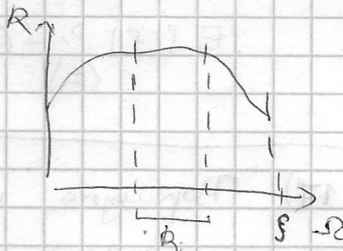
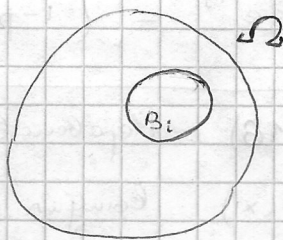
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

ξ - сл. вел., $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j, P(B_i) > 0, \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$

$$E \xi = \sum_i E(\xi|B_i) P(B_i)$$

$$E(\xi | B_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x | B_i)$$

$$F(x | B_i) = P(\xi \leq x | B_i)$$



19) n-кратная свертка функции распределения

$\int F(x)$ - q. распр.

n-кратная свертка $F(x) - F^{*n}(x)$:

$$F^{*n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{*(n-1)}(x-y) dF(y)$$

$$F^{*1}(x) = F(x)$$

$F^{*0}(x) = \delta(x)$ - дельта-функция распределения, имеющая единичный скачок в 0 (вырождающаяся в 0 законе)

20) Плотность распределения

$F(x)$ - абс. непр. д-ное распределение, если $f(x) \geq 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\uparrow$ плотность распределения

$\int(\Omega, \mathcal{F})$ - измеримое нр-во, μ - сигма-конечная мера, λ - мера μ - неогранич., $\lambda \ll \mu$, $\forall A \in \mathcal{F}$

Ир-ные $f(x)$:

$$\lambda(A) = \int_A f(x) d\mu(x)$$

$\uparrow$ плотность относительно доминирующей меры μ

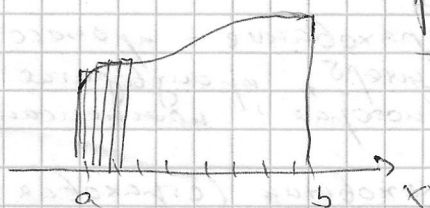
Лекция 5-6

13

Утечан Рундун

$$\int_a^b f(x) dx =$$

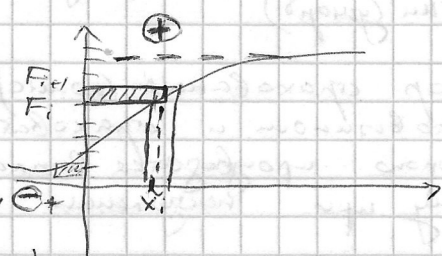
$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum f(\tilde{x}_i) (x_{i+1} - x_i)$$



Утечан Сундундун:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) =$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum \tilde{x}_i (F_{i+1} - F_i), \quad \tilde{x}_i \in [x_i, x_{i+1})$$

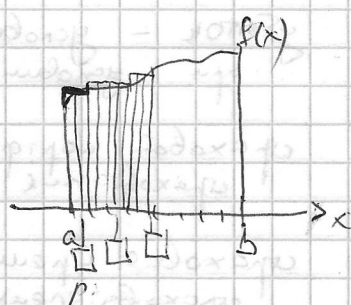


$$= \int_{-\infty}^0 F(x) dx + \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$$

Утечан Лекция

$$\int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x) \sim$$

$$\sim \lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum f(\tilde{x}_i) \cdot \lambda(\Delta_i)$$



$$\int f(x) d\mu(x) = \sum f_i(\tilde{x}_i) p_i$$

[14]

страхование - процесс, при котором лицу, несущему ущерб, производится (предусматривается) некоторая компенсация

страховщик (страховая компания) - организация, занимающаяся страхованием

страхователь - лицо, страхующее свои возможные убытки (ущерб)

договор страхования (полис) - договор между страховщиком и страхователем, на основе которого производится выплата первым последнему при наступлении страхового случая

страховой случай (событие) - инцидент, предусмотренный в договоре страхования, в результате которого страхователь несет убытки

индивидуальный иск (требование, выплата) - итоговая сумма средств, выплачиваемая страховщиком по данному договору страхования

убыток - условное значение величины иска при условии, что иск отличен от 0

страховой портфель - совокупность договоров страхования

страховая премия - сумма, выплачиваемая страхователем страховщику при заключении договора страхования, зачисляемая в страховой фонд

страховой фонд - фонд, предназначенный для покрытия будущих страховых выплат

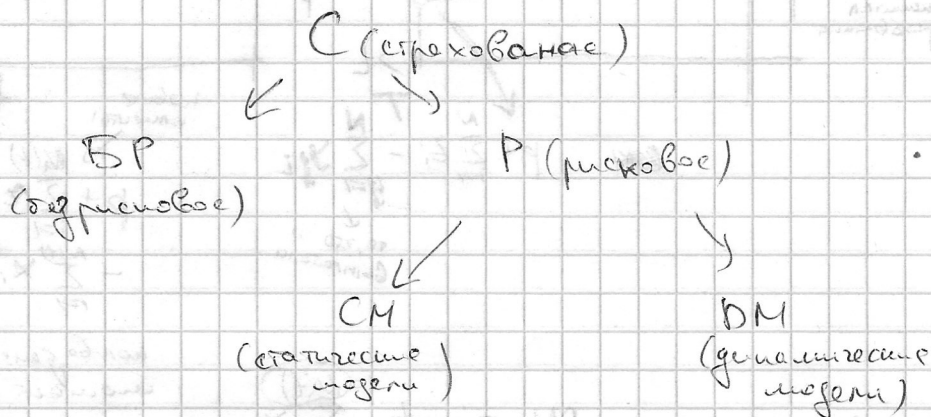
используют взносы страхователя (брутто-премия) —
сумма, выплачиваемая страхователем страхов-
щику при заключении договора страхования

начальный капитал (резерв) — средства, имеющиеся
у страховщика в начальный момент времени
в страховом фонде

разорение — событие, при котором сумма
страховых выплат страховщика в некоторый
момент времени превышает сумму
его начального резерва и сохранившихся страховых
премий

ставка — доля (процентная) страховой суммы,
составляющая страховую премию

страховая сумма — максимально возможная
выплата индивидуального лица по данному
договору страхования



Оур модель индивидуального риска (статистическая модель страхования) описывает ситуацию, в которой рассматривается совокупность событий страхования (страховой портфель), сформированная одновременно, страховое

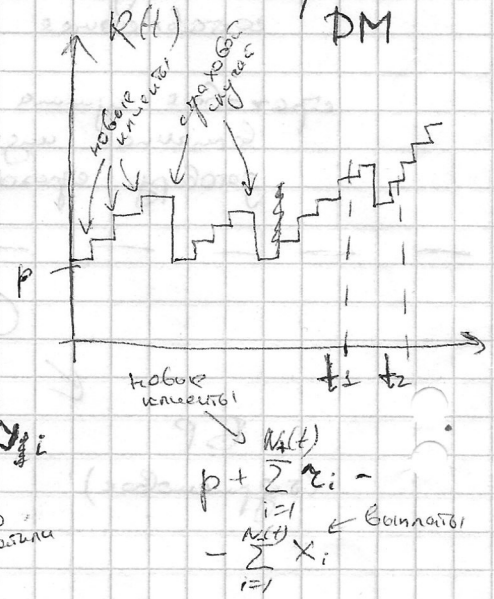
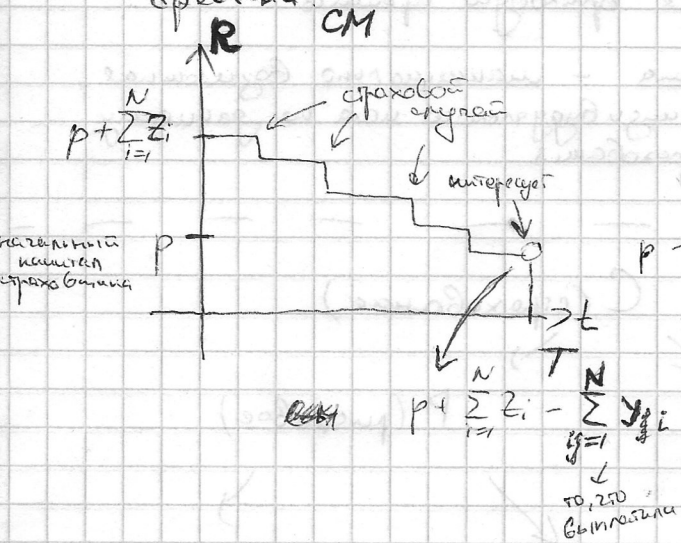
16

уровни софраны в момент формирования портфеля
 свои действия всех договоров страхования
 в течение этого срока происходит страховые события,
 и приводящие и страховые выплаты (иски).

Сур

Модель коллективного риска (динамическая
 модель страхования) предполагает, что
 договоры страхования заключаются страховщиками
 в моменты времени, образующие некоторый
 случайный процесс. Каждый из договоров имеет свою
 собственную длительность, и в течение времени
 действия этого договора могут происходить
 страховые события, приводящие к убыткам
 страховой компании (страхователя).

Такая модель может рассматриваться как
 на конечном, так и на бесконечном интервале
 времени.



аппроксимация DM $p + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$

использует в моменты времени t

Глава 1. Сравнение рисков и простейшие методы расчета страховых тарифов.

§1 Понятие об общей теории оценивания риска

S - начальный капитал страховщика

X_i - выплаты i -ому клиенту

$$X_i \sim F_i(x)$$

функция распределения

X_i - н-ор сл. вел

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

n - число полисов в договоре

$$F(x) = P(X < x)$$

ф-ция распределения суммарного числа -
распределение риска

$$\mu = EX < \infty$$

$$\mu_n = \frac{\mu}{n} \text{ - цена чистого полиса (рисковое проишение)}$$

принцип эквивалентности - если компания продает полисы по этой цене

δ_i - нагрузка (чтобы скомпенсировать функции)

$\mu_n + \delta_i$ - цена чистого полиса

$$S + \sum_{i=1}^n \delta_i + \mu \text{ ожидаем} = R + \mu$$

R - свободный резерв

коэффициент
забв капитала
страховщика

18

$(R, F(x))$ - рисковая ситуация

$$Y = R + \mu - X$$

остаточный (полезный)
резерв ~~страховки~~ страхования

$$G(y) = P(Y < y) =$$

$$= P(R + \mu - X < y) = 1 - F(R + \mu - y + 0)$$

§2. Сравнение рискованных ситуаций страховых компаний. Функции полезности.

$u(y)$ - действ. ф-ция действ. ситуации, характеризующая удовлетворение индивида от обладания ~~некоторой~~ некоторой суммой средств

Свойства: 1) неубывающая - принцип первого стохастического доминирования

$$U(Y) = Eu(Y) < \infty - \text{ожидаемая полезность}$$

н. бер. $\rightarrow Z \succcurlyeq Y \sim P(Z < y) \geq P(Y < y) \Leftrightarrow$

$\downarrow$
лучше (не хуже) $\Rightarrow U(Z) \geq U(Y)$

(обычное свойство неубывания для функции полезности)
отсюда следует принцип доминирования 1)

$$V(y) = au(y) + b, \quad a > 0, b \in \mathbb{R} \quad \text{— тоже функция полезности}$$

линейная теория
полезности

Пример

19

$$z_1 < z_2 < z_3$$

$$Z \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3$$

$$Y \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3$$

$$u(y)$$

$$u(z_1) = 0$$

$$u(z_2) = \delta \in [0, 1]$$

$$u(z_3) = 1$$

$$Z \not\sim Y \quad (\text{зубобанкет})$$

$$(1 - \delta, 0, \delta) \not\sim (0, 1, 0)$$

$$U(Z) = \delta$$

$$U(Y) = \delta$$

I

II

$$\begin{array}{l} 10\% \\ 50\% \\ 90\% \end{array} \quad \begin{array}{l} p = 1 - \delta \\ p = 0 \\ p = \delta \end{array}$$

$$50, p = 1$$

~~100~~

$$\pi(\cdot), v(\cdot), z(\cdot)$$

$$\sum_i v(y_i) \pi(p_i)$$

$$\left(\sum_i v(y_i) \right) \left(\sum_i v(y_i) \pi(p_i) \right)$$

$$\left(\sum_i z(y_i) \pi(p_i) \right) \left(\sum_i v(y_i) \pi(p_i) \right)$$

прямое
сравнение
показателей

$$U(Y) = Eu(Y) = \int u(y) dG(y) =$$

$$= \int u(R + \mu - x) dF(x)$$

Рассмотрим случаи:

1) $u(y) = c \equiv \text{const}$

$U(Y) = c$

2) $u(y) = c \cdot \mathbb{1}_{(y > 0)}$

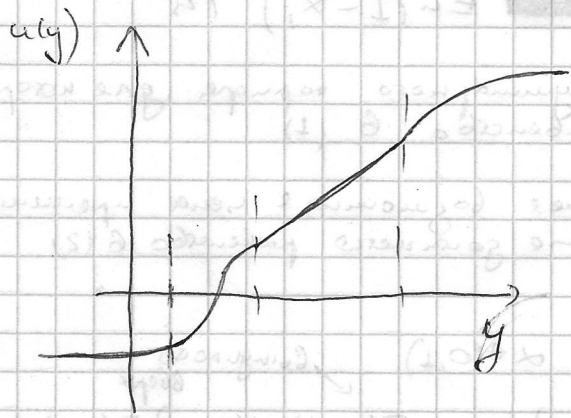
$U(Y) = c \cdot \mathbb{P}(X < R + \mu)$

↑ вероятность неадекватной
организации

3) $u(y) = ay + b, a > 0$

$$U(Y) = aR + a\mu - a \int x dF(x) + b =$$

$$= aR + b$$



(2)

§3. Одним из принципов выбора страховых условий (тарифов).

страховщик

страхователь

S

I

каждый из них

$u(y)$

$\bar{u}(y)$

от неопределенности

π

число страховых
пост

$X = X_1 + \dots + X_n$

X_i

инд. б. и к.

$D = nd$

d

цена единицы

премия по формуле
коррекции

$$E u(S + D - X) \geq u(S) \quad (1)$$

$$\bar{u}(I - d) \geq E \bar{u}(I - X_i) \quad (2)$$

D^* - величина суммарного тарифа, для которого достигается равенство в (1)

d^* - максимальная возможная цена единицы, для которой еще достигается равенство в (2).

$\bar{u}(y)$ $\alpha \in (0, 1)$ $\swarrow$ вынужденность
вверх

$$\bar{u}(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha \bar{u}(x_1) + (1 - \alpha) \bar{u}(x_2)$$

В силу неравенства Йенсена:

$$\bar{u}(I - d^*) = E \bar{u}(I - X_i) \leq \bar{u}(I - EX_i)$$

$d^* \geq EX_i$ (в силу того, что премия должна быть достаточной)

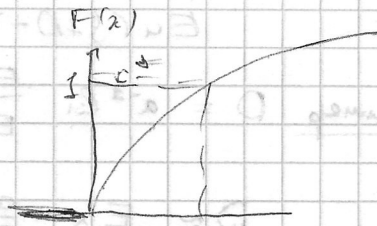
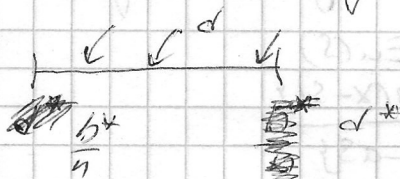
обратное и риску

$$d^* \leq EX_1$$

127

связность к риску

$D^* > nd^*$ - страхование в том случае
возвратно



$$P(X \leq S+D) \geq 1-\delta$$

§4. Принципы расчета
гарантийных ставок

$$D = \Psi(F, \lambda)$$

1) принцип ожидаемого значения

$$D = (1+\lambda) EX, \lambda \geq 0$$

2) принцип дисперсии

$$D = EX + \lambda DX, \lambda \geq 0$$

3) принцип стандартного отклонения

$$D = EX + \lambda \sqrt{DX}, \lambda \geq 0$$

4) принцип функции полезности

$$u(y), u'(y) > 0, u''(y) < 0$$

выпукла вверх

2.3) $E u(S + D - X) = u(S)$

пример: $u(y) = a^{-1} (1 - \exp\{-ay\})$, $a > 0$
 экспонен. р. чис. полезности

$\Rightarrow D = a^{-1} E u(E \exp\{aX\})$

5) обобщенный принцип нулевой полезности

$E u(S + D - X) = E u(S)$

пример $D = a^{-1} E \frac{\exp\{a(X-S)\}}{\exp\{-aS\}}$

$D \approx EX + \frac{a}{2} DX - a \text{cov}(X, S)$

6) принцип Эшера

$D = \frac{EX \exp\{\lambda X\}}{E \exp\{\lambda X\}}$, $\lambda > 0$

$D \equiv D(\lambda)$, $(D(\lambda))'_\lambda \geq 0$

λ больше, тем больше

$\lambda = 0 \rightarrow$ принцип эквивалентности

$D \geq EX$

7) Сущ. принцип (инвариантный)

$E g(X - \lambda D) = g((1 - \lambda) D)$, $\lambda \in (0, 1)$

т.е. $g(x) > 0$, $g'(x) > 0$

$\lambda = 0 \Rightarrow$ обобщенный принцип эквивалентности

$\lambda = 1$ и $g(x) = a^{-1} (\exp\{ax\} - 1)$, $a > 0$, то

$\Rightarrow$ принцип нулевой полезности (эксонен.)

$\lambda = 1$ и $g(x) = x \exp\{ax\} \Rightarrow$ принцип Эшера

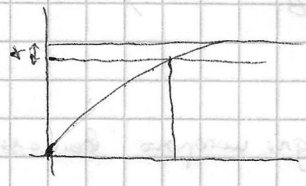
Функции Орнга

$$E_p(X)^{-1} = f(b'^{-1})$$

$\lambda \in [0, 1]$
 $f(\lambda)$ - к-ср. строго вып-е
 г-ние

$\lambda = 0 \Rightarrow$ обобщенный принцип зависимости

9) квадратичный принцип



Глава 2. Статистические модели риска

§1. Модели и задачи теории риска

см. прошлый раз (лекция 5-6)

§2. Вероятность разорения в модели индивидуального риска. Классические асимптотические формулы для страховых премий в статистической модели страхования.

основной капитал

$$R = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{назальный капитал}}}{z} + \sum_{i=1}^N \underset{\substack{\uparrow \\ \text{премии}}}{z_i} - \sum_{i=1}^N \underset{\substack{\uparrow \\ \text{индивидуальный риск (сл. вел.)}}}{y_i} \quad \text{НОРС}$$

N - объем портфеля

- детерминированный
- случайный

z_i - неслуч, равное друг другу, $z_i = 0, z_i = z$

$$R = NZ - \sum_{i=1}^N Y_i$$

25

$$\alpha = E Y_i$$

$$\beta^2 = D Y_i < \infty$$

вероятность
превышения

$$P(NZ - \sum_{i=1}^N Y_i > 0) \geq Q \cdot N$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^N Y_i - \alpha N}{\sqrt{N\beta^2}} \leq \frac{Z - \alpha\sqrt{N}}{\beta}\right) \stackrel{N \gg 1}{\sim} \Phi\left(\frac{Z - \alpha\sqrt{N}}{\beta}\right)$$

Z_0 - наименьшее число, где истинно неравенство $\uparrow$

$$Z_0 = \alpha + \frac{\Phi^{-1}(Q)\beta}{\sqrt{N}}$$

$\downarrow$

симметричные вариации, $Z_0 \geq \alpha$

если $N \sim \text{Pois}(\lambda)$, то $Z_0 = \alpha + \frac{\Phi^{-1}(Q)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{\lambda}}$

~~$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^N Y_i - N E Y_i}{\sqrt{N D Y_i}} < \alpha\right) \sim \Phi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$~~

Лекция 9-10

§4. Факторизационная модель небезусловных рисков. Показатели затрат, относительных и статической модели страхования

инд. иск

$$Y_i = X_i \cdot S_i$$

S_i - страховая сумма (макс. сумма инд. иска)

$$X_i = \frac{Y_i}{S_i} \quad - \text{относительный иск}$$

$z \in [0, 1]$ - ставка - доля страховой суммы, которая будет взыматься с иждивателя в качестве премии

$$Z_i = z X_i \quad - \text{премия}$$

пример

Л.Т.П.	20%
С.Т.П.	40%
Т.Т.П.	70%
Л.И.	100%

$$z = 1\%$$

$$Z_i = 10000 \text{ р}$$

Л.Т.П.

$$S_i = 10 \text{ млн}$$

$$Y_i = 200 \text{ к р}$$

$$X_i = 0,2$$

$$S_j = \$300 \text{ млн}$$

$$Z_j = \$3 \text{ млн}$$

Т.Т.П.

$$Y_j = \$210 \text{ млн}$$

$$X_j = 0,7$$



§5. Определение оптимальной стратегий связи

$$EZ_i \geq EX_i$$

1) $Z \geq EX_i$

вер-ть не разорекся

2) $P(R \geq 0) \geq Q \sim 1$

1) ~~X~~ $Z = EX_i$, $N \gg 1$, $r = 0$, $S_i = S$

бзет не разорекся

кар-каман

$$P(R \geq 0) = P(N \cdot Z \cdot S - \sum_{i=1}^N Y_i \geq 0) =$$
$$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^N Y_i - N S EX_i}{\sqrt{N D Y_i}} \leq \frac{N Z S - N S EX_i}{\sqrt{N D Y_i}}\right) \sim$$

~~Бзет не разорекся~~

$$\sim P(0) = \frac{1}{2}$$

~~X~~ 2) $N = 1, S = 1, r = 0$

$$Y_i = \begin{cases} 0, & Q \\ 1, & 1-Q \end{cases}$$

$$P(R \geq 0) \geq Q$$

$$P(R \geq 0) = P(Z - Y_1 \geq 0) = P(Y_1 \leq Z) = Q$$

$$Z = 0$$

назо а 1, а 2).

Опр Ставка премии, удовлетворяющая условиям 1) и 2), называется достаточной

Опр Умеренная ставка премии — минимальная в некотором классе

Опр Оптимальная ставка премии — удовлетворяет условиям умеренности и достаточности

оптимальные ставки называются оптимально достаточными

§6. Основные предположения и сокращения в расчетах Ф-модели

S_i — корс, X_i — корс

$$S_i \stackrel{d}{=} S \sim F_S$$

$$X_i \stackrel{d}{=} X \sim F_X$$

$$d = d(z) = z - A$$

страховая (рисковая) нагрузка

$$A = E X$$

$$B^2 = D X$$

$$K_i = (z - X_i) S_i$$

случайных доходов по одному контракту

$$K_i \stackrel{d}{=} K \sim F_K$$

$$V^2 = \frac{D S}{(E S)^2}$$

$$R = z + \sum_{i=1}^N K_i \quad \text{остаточный капитал}$$

$$h = E K = E S \cdot d$$

$$g^2 = D K = D S \cdot d^2 + (E S)^2 (1 + V^2) B^2$$

$$j^2 = E K^2 = g^2 + h^2$$

$$\Lambda = E N, \quad M^2 = D N$$

$$\begin{aligned} ER &= z + E \sum_{i=1}^N H_i = z + \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E\left(\sum_{i=1}^n H_i / N=n\right) = \\ &= z + \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E\left(\sum_{i=1}^n H_i / N=n\right) \quad (\text{E}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int z dP\left(\sum_{i=1}^n H_i / N=n\right) \\ &\quad \int x d\left(\frac{P\left(\sum_{i=1}^n H_i < x, N=n\right)}{P(N=n)}\right) = \int z dP(S < x) \quad \text{E} \sum_{i=1}^n H_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{E}) \quad z + \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E \sum_{i=1}^n H_i &= \\ &= z + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n)}_{\lambda} h = z + \lambda h \end{aligned}$$

~~REMARK 2~~

$$DR = D\left(z + \sum_{i=1}^N H_i\right) = D \sum_{i=1}^N H_i =$$

$$ER^2 = E\left(\sum_{i=1}^N H_i\right)^2 - \left(E \sum_{i=1}^N H_i\right)^2 \quad (\text{E})$$

$$E\left(\sum_{i=1}^N H_i\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E\left(\left(\sum_{i=1}^n H_i\right)^2 / N=n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E\left(\left(\sum_{i=1}^n H_i\right)^2 / N=n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E\left(\sum_{i=1}^n H_i\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \left(D \sum_{i=1}^n H_i + \left(E \sum_{i=1}^n H_i\right)^2\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \left(\sum_{i=1}^n D H_i + \left(\sum_{i=1}^n E H_i\right)^2\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \cancel{(\sum_{i=1}^n g^2)} (ng^2 + n^2 h^2) = \quad [30] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) ng^2 + \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) n^2 h^2 = \\
 &= \Lambda g^2 + \cancel{E(N)} E(N^2) h^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \Lambda g^2 + E(N^2) h^2 - \Lambda^2 h^2 = \\
 &= \Lambda g^2 + M^2 h^2
 \end{aligned}$$

$\Phi(x)$ - станд. норм. ф-ция распр.

$L^3(\mathcal{G})$ - кубические графы

$L_0^3(\mathcal{G})$ - центр. кубические графы

$\theta, \theta_i, \theta(\dots)$ - числа, посл.-т., функции Наслуц.

§ 7. Простейшая формула для
ошибок связи, учитывающая два
момента распределения числ в условиях
факторизационной модели

$$z=0, N \gg 1$$

$$P(R \geq 0) > Q$$

$$\begin{aligned}
 &P(R \geq 0) = P\left(\sum_{i=1}^N K_i \geq 0\right) = \\
 &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^N K_i - Nh}{\sqrt{Ng^2}} \geq \frac{-nh}{\sqrt{Ng^2}}\right) \sim \Phi\left(\frac{\sqrt{N}h}{g}\right) > Q
 \end{aligned}$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{N}h_0}{g_0}\right) = Q \quad \text{всех } h(g_0) \quad h_0 = h(z_0)$$

$$\left(\frac{\sqrt{N} h_0}{g_0} \right)^2 = \left(\varphi^{-1}(Q) \right)^2$$

$$\frac{N (z_0 - A)^2 (ES)^2}{DS \cdot (z_0 - A)^2 + (ES)^2 (1 + V^2) B^2} = \left(\varphi^{-1}(Q) \right)^2$$

$$(z_0 - A)^2 (N(ES)^2 - DS (\varphi^{-1}(Q))^2) = \frac{(ES)^2 (1 + V^2) B^2}{(\varphi^{-1}(Q))^2}$$

$$(z_0 - A)^2 = \frac{(ES)^2 (1 + V^2) B^2 \cdot (\varphi^{-1}(Q))^2}{N(ES)^2 - DS (\varphi^{-1}(Q))^2}$$

$$(z_0 - A) = \frac{\cancel{DS} \cdot B \varphi^{-1}(Q) \sqrt{1 + V^2}}{\sqrt{N - (\varphi^{-1}(Q))^2 V^2}}$$

$$z_0 = A + \frac{\sqrt{1 + V^2} B \varphi^{-1}(Q)}{\sqrt{N - (\varphi^{-1}(Q))^2 V^2}} \quad \text{qr-mengen}$$

$$\tilde{z}_0 = \alpha + \frac{\varphi^{-1}(Q) \beta}{\sqrt{N}} \quad \text{klassisches mengen}$$

KM	QM
km $\alpha, S = \text{const}$	$A S, S = \text{const}$
β^2	$B^2 S^2$
$\varnothing$	V^2
$\tilde{z}$	km $z_0 S$

где $z_0 = \frac{\alpha}{S} + \frac{\sqrt{1+\beta} \frac{\beta}{S} \varphi^{-1}(Q)}{\sqrt{N - (\varphi^{-1}(Q))^2 \cdot 0}} = \frac{\alpha}{S} + \frac{\beta \varphi^{-1}(Q)}{S\sqrt{N}} =$
 $= \frac{z_0}{S}$

Лекции 11-12

Теорема 1

С.В. Асимптотическое нормальное распределение в критической аппроксимации

$$EN \rightarrow \infty$$

Теорема 1 R (остаточный процесс) асимптотически нормально при $\Lambda = EN \rightarrow \infty$, т.е.

$$\delta = \sup_{z \in [0,1]} \sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{R-ER}{\sqrt{DR}} \leq x\right) - \varphi(x) \right| = o(1)$$

Пусть $\frac{1}{2} < Q < 1$, $q = \varphi^{-1}(Q)$

$$w = V^2 + \frac{M^2}{\Lambda} = o(\Lambda), \Lambda \rightarrow \infty$$

Тогда 1) если $\exists \theta' < 1$: $\frac{\pi}{ES} \leq \theta' q (1+V^2)^{1/2}$.
 $\cdot B[\Lambda - wq^2]^{1/2}$.

то $\exists \Lambda_0 = \Lambda_0(\theta')$.
 $\forall \Lambda > \Lambda_0$

$$z_0 = A + \frac{q(1+V^2)^{1/2} B}{(1-wq^2)^{1/2}} - \frac{\pi/ES}{\Lambda-wq^2} + \varepsilon$$

$$0 < \varepsilon < \theta(Q) \frac{(1+V^2)^{1/2} B}{\Lambda^{1/2}} \left(\delta + \frac{w}{\Lambda} \right) (*)$$

$$(\varepsilon = o(\Lambda^{-1/2}))$$

$$2) \quad q(1+v^2)^{1/2} B (1-wq^2)^{1/2} \leq \frac{2}{ES} \leq \\ \leq q(1+v^2)^{1/2} B \Lambda^{1/2}$$

$$\Rightarrow \exists \Lambda_1: \forall \Lambda \geq \Lambda_1: z_0 = A + \varepsilon \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (*)$$

$$3) \quad \exists \theta'' > 1 \quad \frac{2}{ES} \geq \theta'' q(1+v^2)^{1/2} B \Lambda^{1/2}$$

$$\Rightarrow \exists \Lambda_2 = \Lambda_2(\theta'') : \forall \Lambda \geq \Lambda_2: z_0 = A$$

остаточный член асимптотически стремится к нулю при любой замене

Частные случаи расщепления
взаимостраховочного покрытия

$$d = z - A \leq \bar{d} = 1 - A$$

$$h = EH = ES \cdot d \leq ES \bar{d}$$

$$g^2 = DH \geq g_0^2 \equiv (ES)^2 (1+v^2) B^2$$

$$\chi^2 = EH^2 \geq g_0^2$$

$$E|H|^3 = ES^3 E|z - A|^3 \leq ES^3$$

$$E|H - h|^3 \leq 4(E|H|^3 + h^3) \leq 4(ES^3 + (ES)^3 \bar{d}^3)$$

$$L^3(H) \leq \bar{L} = \frac{ES^3}{(ES)^3 (1+v^2)^{3/2} B^3}$$

$$L_0^3(H) \leq \bar{L}_0 = \frac{4ES^3 (1+\bar{d}^3)}{(ES)^3 (1+v^2)^{3/2} B^3}$$

Следствие 1 Если N - геометрич. Вслучае ч
 S имеет конеч. третий момент, то
 $g \neq 0$ и 1 супергеометрия с $\Lambda = N$, $M = 0$, $v = v^2$

$$d' = \frac{g(1+v^2)^{1/2} B}{(N - v^2 g^2)^{1/2}} - \frac{2/ES}{N - v^2 g^2}$$

$$\delta \in \Theta_{\text{ит}} \frac{\pi_0 L_0}{N^{1/2}}$$

$\downarrow$
 константа Чебышева-Борнштейна

Следствие 2 Если $N \sim \text{Pois}(\Lambda)$, S , то
 $g \neq 0$ и супергеометрия с $M^2 = \Lambda$
 $w = 1 + v^2$

$$d' = \frac{g(1+v^2) B}{(\Lambda - (1+v^2) g^2)^{1/2}} - \frac{2/ES}{\Lambda - (v^2 + 1) g^2}$$

$$\delta \in \Theta_{\text{ит}} \frac{\pi L}{\Lambda^{1/2}}$$

$\downarrow$
 константа Чебышева для пуассоновского процесса

$$D \sum_{i=1}^n g_i = n D \{g\}_1$$

$$D \sum_{i=1}^n g_i = E \{E \{g\}^2\}$$

35

Модель с конечным источником

N' - число потенциальных подписавшей

η_k $\begin{cases} 1, S_k - \text{вероятность заключения договора} \\ 1 - S_k - \text{вероятность не заключения} \end{cases}$

индикатор, заключил или не заключил договор

$$N = \sum_{k=1}^{N'} \eta_k$$

общее
число

$$\Lambda = EN' = \sum_{k=1}^{N'} S_k$$

$$M^2 = DN' = \sum_{k=1}^{N'} S_k (1 - S_k) < \Lambda$$

$$w = \frac{M^2}{N^2} = o(1)$$

$$\delta = \sup_{z \in [0, 1]} \sup_x \left| P\left(\frac{R - ER}{\sqrt{DR}} \leq x\right) - \Phi(x) \right|$$

$$R = z + \sum_{i=1}^N \eta_i = z + \sum_{i=1}^{N'} \eta_i =$$

$$= z + \sum_{i=1}^{N'} \eta_i \eta_i$$

$$\delta \leq \Theta'_E \frac{\sum_{i=1}^{N'} E|\eta_i \eta_i - S_i \eta|^3}{|DR|^{3/2}} \quad (\leq)$$

$$E|\eta_i \eta_i - S_i \eta|^3 \leq 4 [E|\eta_i - S_i|^3 E|\eta|^3 + S_i^3 E|\eta - \eta_i|^3] \leq$$

$$\leq 4(S_i(1-S_i)E|H|^3 + S_i^2 E|H-h|^3)$$

136

$$y_i - S_i = \begin{cases} 1-S_i, & S_i \\ -S_i, & 1-S_i \end{cases}$$

$$(y_i - S_i)^3 = \begin{cases} (1-S_i)^3, & S_i \\ (S_i)^3, & 1-S_i \end{cases}$$

$$E|y_i - S_i|^3 \leq S_i(1-S_i) \left(|1-S_i|^2 + S_i^2 \right) =$$

$$= S_i(1-S_i) \underbrace{(1 - 2S_i + 2S_i^2)}_{\leq 1}$$

$$\sum_{i=1}^{N'} E|y_i H_i - S_i h|^3 \leq 4M^2 E|H|^3 + (1-M^2) \cdot E|H-h|^3 \leq$$

$$\leq 4M^2 ES^2 + 16(1-M^2) (ES^2 + (ES)^3 d^{-3})$$

$$DR = D \sum_{i=1}^{N'} y_i H_i = \sum_{i=1}^{N'} D y_i H_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{N'} (E y_i^2 E H_i^2 - (E y_i E H_i)^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N'} (S_i E H_i^2 - S_i^2 (E H_i)^2) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{N'} S_i DH_1 \geq \Lambda g_0^2$$

$$\leq \theta'_E \left(\frac{4M^2 ES^3}{\Lambda^{3/2} g_0^3} + \frac{16(1-M^2)(ES^3 + (ES)^3 d^{-3})}{\Lambda^{3/2} g_0^3} \right) \leq$$

$$\leq \theta'_E \left(\underbrace{\frac{4M^2}{\Lambda^{3/2}}}_{\rightarrow 0 \text{ as } \Lambda \rightarrow \infty} L(H) + \underbrace{\frac{4(1-M^2)}{\Lambda^{3/2}}}_{\rightarrow 0 \text{ as } \Lambda \rightarrow \infty} L_0(H) \right) = o(1)$$

=> Выполнены все условия теоремы 1 и можно ее применить.

1
2

15 апреля - понедельник

$$= (2 + (2-1)) (2-1) \cdot 2 = (2-1) \cdot 2 =$$

$$(2^2 + 2 - 1) (2-1) \cdot 2 =$$

$$= (2^2 + 2 - 1) (2-1) \cdot 2 =$$

$$= (2^2 + 2 - 1) (2-1) \cdot 2 =$$

$$= (2^2 + 2 - 1) (2-1) \cdot 2 =$$

$$= (2^2 + 2 - 1) (2-1) \cdot 2 =$$

$$= (2^2 + 2 - 1) (2-1) \cdot 2 =$$

§9 Асимптотические оценки, связанные с угловой нормалью: асимптотическое распределение любого графового поля.

$$\begin{matrix} Z_0 \\ F_S \\ F_X \end{matrix} \quad E S^3 \rightarrow \infty$$

- граф. распр. от нуля

$$C^3 = EX^3$$

$$Z_{0,d} = Z_0(d) = \frac{E(H-L)^3}{6d^3} \quad Z_0(d) \rightarrow$$

$$Z = Z(d) = \frac{6d^3}{6d^3} \quad Z(d) \rightarrow$$

$$U^3 = \frac{ES}{(ES)^3} = \frac{U^3 (A^3 + 3AB^2 - C^3)}{6(1+U^2)^{3/2} B^3}$$

$$Z = \frac{ES^3 E(Z-X)^3}{6d^3} = \frac{ES^3 \{E(d+A-X)^3\}}{6d^3} \sim$$

$$\sim \frac{ES^3 E(A^3 - 3A^2X + 3AX^2 - X^3)}{6(dSd^2 + (ES)^2((1+U^2)B^2 + d^2))^{3/2}} \sim$$

$$\sim \frac{U^3 (A^3 - 3A^3 + 3A(B^2 + A^2) - C^3)}{6B^3 (1+U^2)^{3/2}}$$

153
Опр

решетчатое распределение - если оно сосредоточено на исходах или-бес
тоги (решение)

$$\mathcal{L} = \{x + \eta k, k \in \mathbb{Z}\}$$

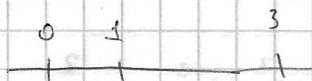
$$P(\zeta \in \mathcal{L}) = 1$$

η - шаг решетки, если распределение сосредоточено на одной ^{решетке} η

Пример

пуассоновское решетчатое с шагом $\eta=1$

или



Опр

f - удовлетворяет условию (C) Крамера, если для характеристической функции $f(t)$ выполняется условие:

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| < 1 \quad (C)$$

Если для распредел. выполнено условие (C), то это распределение является несмешивным и имеет плотность.

Если для распр. выполнено условие (C), то оно будет содержать либо абсолютно непрерывную или сингулярную компоненту

Любое абс. непр. распределение удовлетворяет (C)

(40)

Лемма Если α_0 для α_0 и α_1 распределений F_0, F_1 непрерывное, то α_0 непрерывное F_0 непрерывное

Если α_0 для α_0 и α_1 распр F_0, F_1 условно-равномерно (C) краевая, то F_0 тоже условно-равномерно (C), при этом условие (C) выполняется равномерно по α_0 и α_1

при этом z, π

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} \limsup_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| < \infty$$

Теорема Пусть N - $\mathbb{N}$ -последовательность (последовательность) N -генерализация

1) $\int \alpha_0$ для α_0 и α_1 F_0, F_1 - непрерывное

$$\Rightarrow P\left(\frac{R - (t + Nh)}{N^{1/2} g} < x\right) =$$

$$= \Phi(x) + \frac{\gamma_0}{N^{1/2}} (1-x)^2 \varphi(x) + o(N^{-1/2})$$

равномерно равномерно по z, π, z

2) $\int \alpha_0$ для α_0 и α_1 F_0, F_1 условно-равномерно (C) и $ES^4 < \infty$

$$\Rightarrow P\left(\frac{R - (t + Nh)}{N^{1/2} g} < x\right) =$$

$$= \Phi(x) + \frac{\gamma_0}{N^{1/2}} (1-x^2) \varphi(x) + o(N^{-1})$$

$|\omega| \leq \theta(F_0, F_1)$

Опр Расширение, состоящее из решения L и некоторого $\alpha \in K$, не содержащегося в K , называется расширением L относительно α ($\alpha \neq 0$), — рациональным решением.

Если η и α соизмеримы, то расщепление - рационально реализуемо.

$$\begin{array}{c} \sqrt{3} \quad 2\sqrt{3} \quad 3\sqrt{3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 1 + \sqrt{3} \quad 1 + 2\sqrt{3} \\ \text{27/29} \end{array}$$

$\sqrt{3}$ $\sqrt{3} + 1$ $\sqrt{3} + 2$

upray

Случайная сумма признаков распределенных
случайных величин с невырожденным дисперсион-
ным суммарным распределением тогда и только
тогда, когда распределение случайных
величин нормальное или вырожденное.

$$H = S(2 - X)$$

~~2-X~~

Лемма Если $\mathcal{F}_n$ — расширение $\mathcal{F}_s$ и $\mathcal{F}_s$ — упрощ., то $\mathcal{F}_n$ — перемешивание или упрощ. перемешивание.

Теорема Пусть $N \sim \text{Pois}(\Lambda)$

142

1) Если F_S и F_X не обн. параметризованы
или F_S - упрям.

$$\Rightarrow P\left(\frac{R - (\tau + \Lambda h)}{\Lambda^{1/2}} < x\right) =$$

$$= \Phi(x) + \frac{\gamma}{\Lambda^{1/2}} (1-x^2) \varphi(x) + o(\Lambda^{-1/2})$$

Вспомогательное равенство из ~~теоремы~~ z, x, τ

2) Если F_S и F_X имеют ядр. (C), а
 $F_S : ES^4 < \infty$

$$\Rightarrow P\left(\frac{R - (\tau + \Lambda h)}{\Lambda^{1/2}} < x\right) =$$

$$= \Phi(x) + \frac{\gamma}{\Lambda^{1/2}} (1-x^2) \varphi(x) + O\Lambda^{-1}$$

$$|\omega| \leq O_2(F_S, F_X)$$

Теорема Пусть N -гемметризованное бинарное.

$$1/2 < Q < 1, q = Q^{-1}(Q)$$

$$U' = q + \gamma(1-q^2)/N^{1/2}, N' = N - \gamma^2 V^2$$

[I] Если F_S и F_X - имеют ядр. не обн. параметризованы

$$\Rightarrow \text{с) Если } \exists \theta' < 1 : \frac{\gamma}{ES} \leq \theta'$$

$$\theta' U' (1+V^2)^{1/2} B(N')^{1/2}$$

43) $z_0 = A + d' + \Delta$

$$d' = \frac{u'(1+v^2)^{1/2}}{(1+v^2)^{1/2}} B - \frac{z/ES}{N'} \quad \Delta = o(N^{-1})$$

2) casu $u'(1+v^2)^{1/2} B (N')^{1/2} \leq \frac{z}{ES} \leq$
 $\leq u'(1+v^2)^{1/2} B N^{1/2}$

$$z_0 = A + \Delta$$

3) Casu $\exists \theta'' > 1$

$$\frac{z}{ES} \geq \theta'' u'(1+v^2)^{1/2} B N^{1/2}, \infty$$

$$\exists N_3 = N_3(\theta'') \quad \forall N > N_3 \quad z_0 = A$$

[II] F_S, F_x : xero dei yuo yobn yobnno (C) u
 $ES^4 < \infty$

$\Rightarrow$ bounneero yrb [I] u

6 casu 1) $\exists N_1 = N_1(\theta') \quad \forall N > N_1$

$$|\Delta| \leq \frac{\theta_3(F_S, F_x, Q)}{N^{3/2}}$$

6 casu 2) $\exists N_2$: $\forall N > N_2$

$$|\Delta| \leq \frac{Q_3(F_S, F_x, Q)}{N^{3/2}}$$

Теорема (про независимого случая)
 $N \sim \text{Pois}(\Lambda)$

~~44~~

I F_S, F_X — хотя бы одно не есть разностная или F_S — чирра.

N меньше на Λ

II аналогично, N меньше на Λ

§ 10 Гарантирование (вернее) оценки страховых тарифов в стохастической модели страхования.

$$A = EX$$

$$B^2 = DX$$

$$\mu = ES$$

$$v^2 = \frac{DS}{\mu^2}$$

$$d = d(z) = z - A$$

$$H_i = S_i (z - X_i)$$

$$R = z + \sum_{i=1}^N H_i$$

$$h = \mu d = EH$$

$$g^2 = DH = \mu^2 (v^2 d^2 + (1+v^2) B^2)$$

$$g^2 = \mu^2 (1+v^2) B^2$$

~~$$A = EH, M^2 = DH$$~~

$$\Lambda = EN, M^2 = DN$$

$$w = v^2 + \frac{M^2}{\Lambda}$$

$$g = \frac{z}{\mu}$$

$$ER = z + \Lambda h, DR = \Lambda g^2 + M^2 h^2$$

$$z_0 = \inf \{ z \mid z \geq A, P(R \geq 0) \geq Q \wedge 1 \}$$

$z' \in [0, 1]$ - гарантированная ставка, ставка оптимальной ставки процесс

$$z_0 \leq z' \quad \forall N \text{ (начиная с некоторой)}$$

$$S \leq C \text{ н.н.}$$

Верхние оценки страховой ставки для сублимитированного объема страхового портфеля

Лемма (неравенство Хенджинга)

Если $\{z_i\}_{i=1}^N$ - независимые бер. величины, удовлетворяющие:

$$E z_i = 0, \quad |z_i| \leq L \text{ н.н.}$$

$$G^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E z_i^2$$

, то $\forall t \in [0, L]$

$$P(z_1 + \dots + z_N \geq Nt) \leq$$

$$\leq \exp \left\{ - \frac{NG^2}{L^2 + G^2} \left(1 + \frac{Lt}{G^2} \right) \ln \left(1 + \frac{Lt}{G^2} \right) - \frac{NL^2}{L^2 + G^2} \left(1 - \frac{t}{L} \right) \ln \left(1 - \frac{t}{L} \right) \right\}$$

2) если $t = L$, то $\lim_{t \rightarrow L} \dots$

$$P(z_1 + \dots + z_N \geq Nt) \leq \left(\frac{G^2}{L^2 + G^2} \right)^N$$

3) $t > L$

96

$$P(\{x_1 + \dots + x_N \geq Nt\}) = 0$$

$$W = R - r = \sum_{i=1}^N H_i$$

$$EW = Nh, \quad DW = Ng^2$$

$$P(R \leq 0) = P(W \leq -r)$$

$$H_i \geq -c(1-A) \text{ n.h.}$$

↓
оценим
с помощью неравенства

$$H = S(z - \hat{x})$$

$$\begin{matrix} 1 & \wedge & \wedge \\ c & A & 1 \end{matrix}$$

$$W \geq -NL(1-A) \text{ n.h.}$$

$$P(W \leq u) = 0, \quad u \leq -NL, \quad L = c(1-A)$$

$$P(W \leq u) = P\left(\sum_{i=1}^N H_i - Nh \leq u - Nh\right) =$$

$$= P\left\{\sum_{i=1}^N \xi_i \geq -u + Nh\right\} = P\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \geq -u + Nh\right)$$

$$P(R \geq 0) \geq Q \approx 1$$

$$P(R \leq 0) = P\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \geq r + Nh\right) \leq 1 - Q$$

$$\xi_i = S_i(x_i - z) + \mu(z - A) \leq$$

$$\leq S_i(1 - z) + \mu(z - A) \leq L = c(1 - A)$$

47

$$G^2 = g^2$$

Теоорема 1) Нпу $N(h-L) < u \leq Nh$

$$P(w < u) \leq \exp \left\{ - \frac{Ng^2}{L^2 + g^2} \left(1 + \frac{Lt}{g^2} \right) \ln \left(1 + \frac{Lt}{g^2} \right) - \frac{NL^2}{L^2 + g^2} \left(1 - \frac{t}{L} \right) \ln \left(1 - \frac{t}{L} \right) \right\}$$

2) нпу $u = N(h-L)$

$$P(w < u) \leq \left(\frac{g^2}{L^2 + g^2} \right)^N$$

$$t = h - \frac{y}{N}$$

$$L = c(1-A)$$

3) $u < N(h-L)$

$$P(w < u) = 0$$

Крегербуе нпу $0 \leq z < N(L-h)$

$$P(R < 0) \leq \exp \left\{ - \frac{Ng^2}{L^2 + g^2} \left(1 + \frac{Lt}{g^2} \right) \ln \left(1 + \frac{Lt}{g^2} \right) - \frac{N^2 L^2}{L^2 + g^2} \left(1 - \frac{t}{L} \right) \ln \left(1 - \frac{t}{L} \right) \right\}$$

$$t = h + \frac{z}{N}, \quad L = c(1-A)$$

$$P(R < 0) = 0 \quad \text{нпу} \quad z > N(L-h)$$

$$P(w < a) \sim \mathcal{P}\left(\frac{a - N\mu}{\sqrt{N\sigma^2}}\right)$$

4D

Лекции 15-16

при $y > 0$ $0 \leq x < \frac{1}{y}$

$$u(x, y) = \exp\left\{-\frac{y^2}{1+y^2}\left(1+\frac{x}{y}\right)\ln\left(1+\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{1+y^2}(1-xy)\ln(1-xy)\right\}$$

$$u\left(\frac{1}{y}, y\right) = \frac{y^2}{1+y^2}$$

$$u(x, 0) = 1$$

$$u(x, y) \leq 1$$

$$S(p, y): u(x, y) = p \Rightarrow u(S(p, y), y) = p$$

$$\frac{y^2}{1+y^2} \leq p \leq 1 \quad S(p, y) = 0$$

Теорема

$$q = N \cdot S((1-Q)^{1/N}, g_0/L)$$

S - функция распределения
называется
наконец

$$N > \max\left\{\frac{\ln(1-Q)}{\ln(g_0^2/(1+g_0^2))}, V \cdot q\right\} \cdot \infty$$

оценки минимального значения z_0 :

$$z_0 \leq z' = \min\{A + d', 1\}$$

$$d': \beta^2 \leq q^2(1+V^2)B^2$$

$$d' = \frac{(N^2 - g^2 V^2) g^2 (1 + V^2) B^2 + g^2 V^2 g^2)^{1/2} - g}{N^2 - g^2 V^2}$$

$$g^2 > g^2 (1 + V^2) B^2. \quad d' = 0 \Rightarrow z' = z_0 = A$$

Можно показать, что при $N \rightarrow \infty$

$$g \sim (2N \ln(1-\alpha))^{1/2}$$

Следствие

$$1) \text{ } z_0 \text{ вып: } z_0 \leq z' = A + d'$$

при $N \rightarrow \infty$

$$d' \sim \left(2 \ln(1-\alpha) \right)^{1/2} \frac{(1+V)^{1/2} B}{N^{1/2}}$$

Верхние оценки страховых
таблиц для объема страхового
портфеля, распределенного по
забаву Пуассона

$$N \sim \text{Pois}(N)$$

$$\{z_1, z_2, \dots\} \sim \{ \}$$

$N, z_1, z_2, \dots$ - независимы

$$S(N) = \sum_{i=1}^N z_i$$

$$E\beta = a'$$

$$D\beta = b^2$$

$$ES(\Lambda) = \Lambda a$$

$$DS(\Lambda) = \Lambda(a^2 + b^2) = G^2$$

$$\forall x: P(S(\Lambda) - \Lambda a > Gx) \leq \exp$$

$$\leq \exp \left\{ -x^2 \frac{(1+\zeta) \ln(1+\zeta') - \zeta}{\zeta^2} \right\}$$

$$\zeta = \frac{am}{G}$$

$$\zeta' = \min\{\zeta, e-1\}$$

$$|S| \leq C_{n,h}$$

$$W = \sum_{i=1}^N h_i$$

$$EW = \Lambda h$$

$$DW = \Lambda(h^2 + g^2)$$

$$ER = \Lambda h$$

$$DR = DW$$

$$P(W < u) = P\left(\sum_{i=1}^N h_i - \Lambda h < u - \Lambda h\right) =$$

$$= P\{Z_i = -h_i\} = P\left(\sum_{i=1}^N Z_i + \Lambda h > -u + \Lambda h\right)$$

$$P(R < 0) = P\left(\sum_{i=1}^N Z_i + \Lambda h > c + \Lambda h\right)$$

$$|Z_i| \leq C_{n,h}$$

$$G^2 = \Lambda(w^2 + g^2)$$

5) Теорема при $u \notin \Lambda h$

$$P(u < \tau) = \exp\left\{-\frac{\Lambda(h^2 + g^2)}{c^2} \left[(1+\gamma) e^{u/(1+\gamma')} - \gamma' \right]\right\}$$

$$\gamma = \frac{c(-u + \Lambda h)}{\Lambda(h^2 + g^2)}$$

$$\gamma' = \min\{\gamma, e-1\}$$

Следствие
 $\tau \geq 0$

$$P(R < 0) < \exp\left\{-\frac{\Lambda(h^2 + g^2)}{c^2} \left[(1+\gamma) e^{u/(1+\gamma')} - \gamma' \right]\right\}$$

$$\gamma = \frac{c(\tau + \Lambda h)}{\Lambda(h^2 + g^2)}$$

$$\gamma' = \min\{\gamma, e-1\}$$

$$\tau + \Lambda h \geq (e-1) \Lambda(h^2 + g^2) / c$$

$$P(R < 0) < \exp\left\{(e-2) \frac{\Lambda(h^2 + g^2)}{c^2} - \frac{\Lambda h}{c}\right\} \exp\left\{-\frac{\tau}{c}\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{\Lambda h}{c}\right\} \exp\left\{-\frac{\tau}{c}\right\}$$

$$\psi(u) = \Lambda e^{-\beta u}$$

$$w > 0$$

Def

$$F(w) = \begin{cases} (1+w) \ln(1+w) - w, & -e \leq w \leq e-1 \\ 2 - e + w, & w > e-1 \end{cases}$$

$$T(u) \text{ - функция } u = w \text{ } F(w) = u, \quad u > 0$$

$$F(T(u)) = u$$

Теорема $\square \quad q = \frac{\Lambda g_0}{G} T\left(\frac{c^2}{\Lambda g_0^2} \ln \frac{1}{1-\alpha}\right)$

если градус мерки горизонт

условия равенства $\Lambda^2 > q^2/(1+v^2)$, то

оно имеет вид $z_0 \leq z' = A + d'$,

где $\square \quad g^2 \leq q^2 (1+v^2) B^2$

$$d' = \frac{\left(\left(\Lambda^2 - q^2 (1+v^2) \right) q^2 (1+v^2) B^2 + q^2 v^2 g^2 \right)^{1/2}}{\Lambda^2 - q^2 (1+v^2)}$$

$$g^2 > q^2 (1+v^2) B^2 \Rightarrow z_0^* = z' = A$$

$$d' = 0$$

Замечание

при $\Lambda \rightarrow \infty$

$$q \sim \left(2 \Lambda \ln \frac{1}{1-\alpha} \right)^{1/2}$$

Следствие

где $z_0 : z_0 \leq z' = A + d'$

при $\Lambda \rightarrow \infty$

$$d' \sim \left(2 \ln \frac{1}{1-\alpha} \right)^{1/2} \frac{(1+v^2)^{1/2} B}{\Lambda^{1/2}}$$